

ЛЛ. Множество вещественных чисел. Декартовы прямоугольные координаты на прямой, плоскости и в пространстве. Полярные координаты. Комплексные числа. Формы представления комплексных чисел.

1. Множества

Определение. *Множеством* называется совокупность, собрание каких-либо объектов произвольной природы. Объекты, входящие в данное множество, будем называть *элементами* множества.

Запись $a \in A$ означает, что объект a есть элемент множества A (принадлежит множеству A); в противном случае пишут $a \notin A$ (или $a \bar{\in} A$). Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* и обозначается символом $\square$. Запись $A \subset B$ (A содержится в B) означает, что каждый элемент множества A является элементом множества B . В этом случае множество A называется *подмножеством* множества B . Множества A и B называются *равными* ($A = B$), если $A \subset B$ и $B \subset A$, другими словами, множества считаются равными, если они состоят из одних и тех же элементов.

Существуют два основных способа задания (описания) множеств.

а) множество A определяется непосредственным перечислением всех своих элементов $a_1, a_2, \dots, a_n$ т.е. записывается в виде:

б) Множество A определяется как совокупность тех и только тех элементов из некоторого основного множества T , которые обладают общим свойством α . В этом случае используется обозначение:

Множества, элементы которых являются числами, называются *числовыми*. Приведём основные примеры числовых множеств.

Множество натуральных чисел обозначается через N , $N = \{1, 2, 3, \dots\}$.

В множестве N действуют операции сложения и умножения.

Множество целых чисел обозначается через Z :

$$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

В множестве Z действуют операции сложения, вычитания и умножения.

Множество рациональных чисел обозначается через Q ,

$$Q = \left\{ \frac{p}{q} : p \in Z, q \in N \right\}.$$

В множестве Q действуют все четыре арифметические операции. Множество всех действительных чисел – как рациональных, так и иррациональных, обозначается через R . В нём выполняются все арифметические действия и извлекаются корни любой степени из неотрицательных чисел.

Эти множества являются подмножествами друг друга в следующем порядке:

$$N \subset Z \subset Q \subset R.$$

2. Символика математической логики. Для сокращения записи в дальнейшем будем употреблять некоторые основные *логические символы*, или *кванторы*. Пусть α и β некоторые предложения.

1) Запись $\alpha \Rightarrow \beta$ означает: “из α следует β ”, “ $\square$ ” символ импликации.

2) Запись $\alpha \Leftrightarrow \beta$ означает “ α и β эквивалентны”, т.е. что из $\alpha \Rightarrow \beta$ и из $\beta \Rightarrow \alpha$.

“ $\square$ ” – символ эквивалентности.

Любую теорему в математике можно записать в виде $\alpha \Rightarrow \beta$ или в виде $\alpha \Leftrightarrow \beta$, α – условия теоремы а β – её утверждение.

3) Знак " $\forall$ " означает: "каждый, любой, для каждого" и т. д. $\forall$ – квантор общности. Например, $\forall x \in X \alpha(x)$ означает: "для всякого элемента $x \in X$ истинно утверждение $\alpha(x)$ ".

4) Знак " $\exists$ " означает "существует, найдется, имеется". " $\exists$ " – квантор существования. $\exists$ – перевернутая E – начальная буква слова "Existenz" – "существует". Например, $\exists x \in X \alpha(x)$ означает: существует элемент $x \in X$ такой, что для него истинно утверждение $\alpha(x)$. Если элемент x из X для которого истинно утверждение $\alpha(x)$, не только существует, но и единствен, то пишут: $\exists! x \in X \alpha(x)$.

5) Знак ":" означает: "такой, что" или "такие, что", специального названия он не имеет.

6) Знак " $\neg$ " или $\bar{\alpha}$ означает отрицание утверждения α , " $\neg$ " – символ отрицания. Часто при доказательстве теорем используется метод "от противного", который использует равносильность предложений ($\alpha \Rightarrow \beta$) и ($\beta \Rightarrow \alpha$).

7) Запись $\alpha \wedge \beta$ означает " α и β " (" $\wedge$ " – символ конъюнкции).

8) Запись $\alpha \vee \beta$ означает " α или β " (" $\vee$ " – символ дизъюнкции).

3. Отрезок, интервал, ограниченное множество. Введём следующие обозначения для подмножеств в R .

Множество чисел $x \in R$, удовлетворяющих неравенствам $a \leq x \leq b$, называется **отрезком** (с концами a, b) или **сегментом** и обозначается так

$$[a, b], \text{ т. е. } [a, b] = \{x \in R : a \leq x \leq b\}.$$

Множество чисел $x \in R$, удовлетворяющих неравенству $a < x < b$, называется **интервалом** (с концами a, b) или **открытым отрезком** и обозначается так (a, b) , т. е. $(a, b) = \{x \in R : a < x < b\}$.

Множество чисел $x \in R$, удовлетворяющих неравенствам $a \leq x < b$ или $a < x \leq b$, обозначаются соответственно $[a, b), (a, b]$ и называются **полуоткрытыми отрезками** или **полуинтервалами**. Первый, например, закрыт слева и открыт справа.

*Отрезки, интервалы и полуинтервалы называются **числовыми промежутками** или просто **промежутками**.*

Произвольный интервал (a, b) , содержащий точку x_0 мы будем называть **окрестностью** точки x_0 . В частности, интервал $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$) называют ε - **окрестностью** точки x_0 : $U_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

Часто рассматривают множества, называемые бесконечными интервалами или полуинтервалами:

1) $(-\infty, +\infty)$, 2) $(-\infty, a]$, 3) $(-\infty, a)$, 4) $(a, +\infty)$, 5) $[a, +\infty)$.

Первые из них есть множество всех действительных чисел (действительная прямая), остальные состоят из всех чисел, для которых соответственно:

2) $x \leq a$, 3) $x < a$, 4) $a < x$, 5) $a \leq x$.

Если a и b конечны и $a < b$, то число $b - a$ называется **длиной** сегмента $[a, b]$ или интервала (a, b) , или полуинтервала $(a, b], [a, b)$.

Пусть X есть произвольное множество действительных чисел.

Говорят, что множество X **ограничено сверху**, если $\exists$ (действительное), число M такое, что $\forall x \in X : x \leq M$.

Ограничено снизу, если $\exists$ число m такое, что $\forall x \in X : x \geq m$.

Ограничено, если оно ограничено как сверху, так и снизу. В противном случае, оно называется **неограниченным**.

Ясно, что множество X ограничено, если $\exists M > 0 : \forall x \in X \Rightarrow |x| \leq M$, так как

$$(|x| \leq M) \Leftrightarrow (-M \leq x \leq M).$$

Неограниченное множество X можно определить так: множество X неограниченно $\Leftrightarrow \forall M > 0, \exists x_0 \in X : |x_0| > M$.

Пример $[a, b]$ – ограниченное множество (a, b) – ограничено, если a и b конечны и не ограничено, если $(-\infty \leq a), (b \leq \infty)$.

Декартова система координат.

Декартовой системой координат в пространстве называется совокупность точки и базиса.

Точка называется началом координат, прямые, проходящие через начало координат в направлении базисных векторов, называются осями координат.

Базис называется ортонормированным если его векторы попарно ортогональны и по длине равны единице.

Декартова система координат, базис которого ортонормирован, называется декартовой прямоугольной системой координат.

Полярная система координат.

Полярная система координат определяется точкой O называемой **поллюсом** и исходящей из поллюса лучом который называется **полярной осью**

Положение точки фиксируется его радиус-вектором и углом между полярной осью и радиус-вектором. Полученный угол называется **полярным углом**

Декартовы координаты точки выражаются через полярные координаты так

Комплексные числа. Формы представления комплексных чисел.

Определение комплексного числа:

где:

x — вещественная часть,

y — мнимая часть,

Обозначим действительную и мнимую части комплексного числа следующим образом

Формы представления комплексных чисел

1. Алгебраическая форма

2. Тригонометрическая форма

Любое ненулевое комплексное число можно записать через **модуль** и **аргумент**:

где:

3. Показательная форма (экспоненциальная форма, форма Эйлера)

Используя формулу Эйлера:

мы получаем

- **Алгебраическая форма** —удобна для сложения и вычитания.
- **Тригонометрическая и показательная формы** —удобны для умножения, деления и возведения в степень.

Комплексное Число $Z = 3 + 4i$ И Его Представления

